Geometría afín en el aula de secundaria

Randall Blanco Benamburg – randall.blanco@emate.ucr.ac.cr
Ana María Sandoval Poveda – amsandoval@uned.ac.cr
Universidad de Costa Rica – Universidad Estatal a Distancia

Resumen

La inclusión del tema "simetrías" en el programa de estudio de la Educación General Básica (EGB) invita a los docentes en el área de Matemática a buscar distintas maneras de tratar el tema y de trabajar con sus estudiantes. Esta es una propuesta para trabajar el tema considerando el cambio de enfoque que provoca la inclusión del tema en los programas de estudio.

Palabras clave

Enfoque afín – enfoque sintético – enfoque métrico – enfoque SMSG – geometría euclidiana – congruencia – eje de simetría – simetrías – reflexión.

Objetivo

Proporcionar al profesor de secundaria la oportunidad de acercarse, en forma práctica, a los contenidos propios de la simetría axial.

Introducción

Una de las últimas modificaciones hechas al programa de estudios de Matemática para secundaria contempla la inclusión del tema "simetría axial" en octavo año. Este tema pertenece al estudio de la geometría afín y fue insertado en un programa de estudios que contempla el trabajo en geometría euclidiana tradicional desde un enfoque diferente.

El enfoque de estudio de los demás temas de Geometría del programa no varió. Además, no se dio una orientación, o al menos una justificación, de cómo, por qué o para qué se hace esta combinación. Sin embargo, los profesores de Matemática, que trabajan con estudiantes de octavo año, se ven en la obligación de buscar la forma de mezclar estos dos enfoques dentro de un mismo curso.

Las actividades a desarrollar en este taller pretenden lograr que los docentes participantes se concienticen sobre la existencia de dos enfoques diferentes de la Geometría en el programa de estudios y que, además, valoren diferentes actividades que se les proponen para trabajar con los estudiantes de octavo año.

Marco teórico

Para trabajar las simetrías axiales es necesario tener claro el conjunto de herramientas de las que se dispone. Para esto es preciso ubicarse en cuál de los diferentes enfoques de la Geometría se trabajará y con ello determinar la mejor manera de lograr los objetivos propuestos en los programas de estudio.

Enfoques de estudio de la Geometría euclidiana

Un enfoque para el estudio de la Geometría es un marco que delimita el trabajo a realizar, esto implica, por ejemplo, conocer el conjunto de axiomas y de conceptos primitivos que se considerarán. A partir de un enfoque específico, se puede llegar a unas conclusiones particulares no siempre iguales a las que se obtienen tomando como punto de partida uno diferente. Aunque los resultados obtenidos de distintos enfoques difieran eso no implica que sean inconsistentes con el marco elegido.

Para el estudio de la Geometría existen varios marcos diferentes. En Costa Rica, el programa de estudios vigente para la Enseñanza General Básica (EGB), señala que debe estudiarse Geometría euclidiana; pero no indica el enfoque matemático que debe usarse para trabajar en este tema. A continuación se detallan cuatro enfoques:

Enfoque sintético: surge con la Geometría griega. En esta forma particular, no se utiliza el concepto de medida y solo se trabaja con las propiedades de las figuras. Este enfoque fue planteado por Euclides y se consigna en la obra *Los Elementos*. David Hilbert (1862 – 1943) reestructuró la Geometría de Euclides a la manera moderna de un sistema axiomático. En realidad, Hilbert hizo un poco más que esto, pues aparte de reformular los axiomas euclidianos, le dio el valor merecido al sistema deductivo y a la sintaxis utilizada para escribir el lenguaje matemático, y planteó que el contenido semántico del sistema puede ser remplazado por otro cualquiera. Hilbert estipuló:

- 5 definiciones
- 4 axiomas de conexión
- 4 axiomas de orden
- 5 axiomas de congruencia
- 1 axioma de paralelismo
- 2 axiomas de continuidad

A partir de esta estructura, aun se demuestran teoremas.

Enfoque métrico: George David Birkhoff (1884 – 1944), matemático norteamericano, estableció las bases del enfoque métrico de la Geometría euclidiana. Este enfoque se diferencia del anterior porque postula una función de "medida" que permite utilizar este recurso con las figuras geométricas. Birkhoff determinó:

- un conjunto de términos no definibles
- varias definiciones
- 4 postulados

Es necesario señalar que este enfoque surge directamente de la base aportada por Euclides en su obra magna. El enfoque métrico permite partir de una menor cantidad de axiomas que el enfoque sintético. Al partir de otros axiomas u otras definiciones; como por ejemplo la función de medida de longitud, la de medida de área y la de medida angular; los teoremas que se deben y se pueden demostrar también cambian. Las propiedades de los números reales pueden y son usadas para trabajar los temas geométricos. Desde esta perspectiva, el enfoque propuesto por Birkhoff permite una interrelación entre los conjuntos numéricos y la Geometría.

Enfoque del grupo de Estudio de la Matemática Escolar SMSG: este enfoque mezcla elementos de los dos anteriores y se relaciona con la llamada Matemática Moderna de los años sesenta. Es el utilizado en Costa Rica en los programas de estudio, pero no es claro debido a las modificaciones que han sufrido. Aunque no se especifica en ningún documento oficial, es el utilizado en la producción de libros de texto y materiales didácticos.

Básicamente, este enfoque considera tres conceptos no definidos (punto, recta y plano) y un grupo de 22 postulados en los que se basa toda la Geometría que se estudia en la EGB.

Enfoque afín: este enfoque para el estudio de la Geometría se debe a Félix Klein (1849 – 1925). En 1872, pronunció una conferencia en la que ofreció una visión de la Geometría desde el punto de vista de la **Teoría de grupos**. Esta conferencia se conoce con el nombre de Programa de Erlangen. Este programa es el resultado de un trabajo matemático arduo. El planteamiento surge a partir de la búsqueda de definir la Geometría y de clasificar sus objetos de estudio. La principal herramienta para este enfoque es el Álgebra lineal. Estudia las transformaciones del plano en él mismo y las propiedades que se mantienen invariantes, análogamente para el espacio.

Una de las ventajas que presenta este enfoque sobre los otros que se han mencionado, es la estrecha relación que presenta con otra área de la Matemática. El Álgebra lineal es una de las ramas con más aplicaciones a otras ciencias. Si los estudiantes que se gradúan de bachilleres pudieran manejar las diferentes áreas de la Matemática de forma más integral, podrían aplicar sus conocimientos con mayor facilidad a la resolución de los problemas que se les plantean.

Simetría axial

A continuación se presentarán las definiciones y algunos resultados básicos para el trabajo de este tema con estudiantes de secundaria. El desarrollo propuesto considera una distribución de temas diferente al establecido por el Ministerio de Educación Pública (MEP); básicamente se asume que el estudiante ya conoce el concepto de congruencia de triángulos. Esto se debe a la consideración de los enfoques de estudio de la Geometría y el deseo de evitar que el tema esté aislado.

I. Transformaciones en el plano

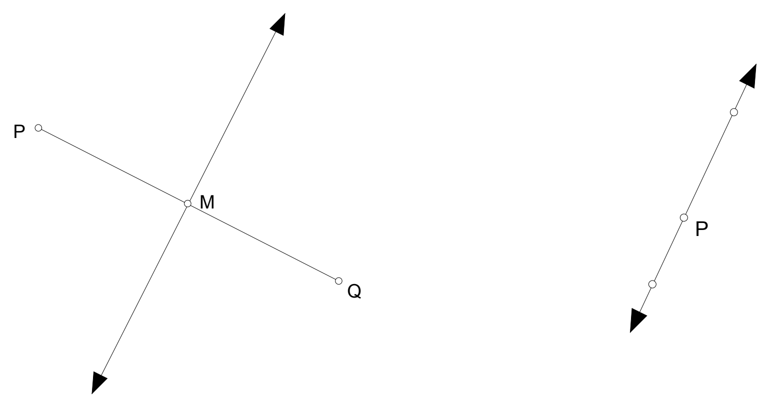
Definición 1: Una *transformación en el plano* es una correspondencia entre sus puntos, tal que a cada uno se le asocia un único punto del mismo plano. Si al punto A se le asocia el punto A_1 se dice que A es la preimagen de A_1, o bien, que A_1 es la imagen de A.

Definición 2: Una transformación que preserva distancias se llama **isometría**.

Definición 3: Un punto P del plano se dice que es un **invariante** bajo una transformación si es igual a su imagen.

Definición 4: En un plano, una **simetría respecto a una recta** l es una transformación que a cada punto P del plano le hace corresponder otro punto Q de la siguiente manera:

- Si P pertenece a la recta l entonces $Q = P$.
- Si P no pertenece a la recta l, entonces l es la mediatriz del segmento $\overline{PQ}$.



También se dice que Q es la imagen de P bajo la simetría respecto a l. A la recta l se le llama el eje de simetría.

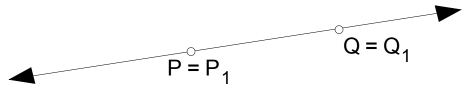
Definición 5: Si A es un conjunto de puntos en el plano, se dice que la recta l es un eje de simetría de A si la imagen de A bajo la simetría respecto a la recta l es A.

Propiedades de una simetría respecto a una recta

Teorema 1: Una simetría respecto a una recta es una isometría.
Demostración:

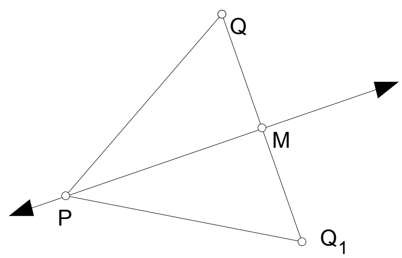
Sean P_1 y Q_1 las imágenes respectivas de P y Q bajo la simetría respecto a una recta l. Hay que probar que los puntos P_1 y Q_1 están a igual distancia que los puntos P y Q, es decir, $\overline{PQ} \cong \overline{P_1Q_1}$.

CASO I: Ambos puntos P y Q pertenecen a la recta l.



Como los puntos pertenecen al eje de simetría entonces se cumple que: $P = P_1$ y $Q = Q_1$ por lo que la congruencia $\overline{PQ} \cong \overline{P_1Q_1}$ es evidente.

CASO II: Solamente uno de los puntos pertenece a la recta l.



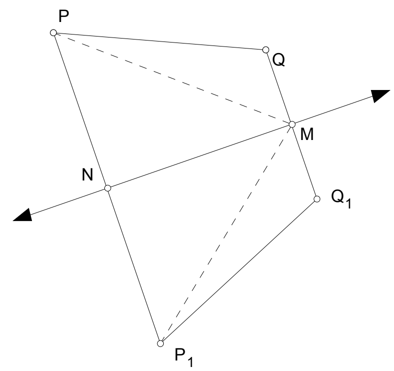
Suponga que el punto que pertenece a la recta es P, entonces $P = P_1$.

Sea M el punto de la recta l tal que es el punto medio del segmento $\overline{QQ_1}$, entonces:

- $MQ = MQ_1$
- $MP = MP_1$
- $\angle QMP \cong \angle Q_1MP_1$ por ser rectos.

Por el postulado L.A.L. se tiene que $\Delta PQM \cong \Delta P_1Q_1M$, por lo tanto $\overline{PQ} \cong \overline{P_1Q_1}$ como se quería probar.

CASO III: Ambos puntos están de un mismo lado de la recta l.



Sean M y N, respectivamente, los puntos de l tales que son los puntos medios de los segmentos $\overline{PP_1}$ y $\overline{QQ_1}$.

(1) Note que:

- $\overline{MN} \cong \overline{MN}$
- $\overline{NP} \cong \overline{NP_1}$ porque N es el punto medio de $\overline{PP_1}$.
- $\angle MNP \cong \angle MNP_1$ por ser rectos.

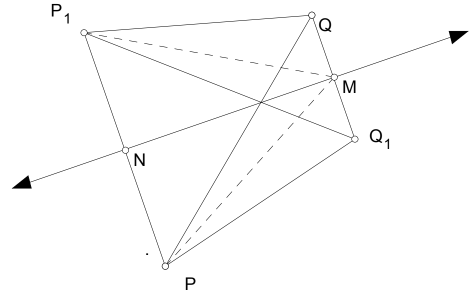
Entonces $\Delta PMN \cong \Delta P_1MN$ por el postulado L.A.L. Por lo tanto $\overline{MP} \cong \overline{MP_1}$.

(2) Como $\angle QMN \cong \angle Q_1MN$ y $\angle NMP \cong \angle NMP_1$ entonces $\angle QMP \cong \angle Q_1MP_1$.

(3) $\overline{MQ} \cong \overline{MQ_1}$ porque M es el punto medio de $\overline{QQ_1}$.

De (1), (2) y (3) se tiene, por el teorema L.L.L., que $\Delta PMQ \cong \Delta P_1MQ_1$ y por lo tanto $\overline{PQ} \cong \overline{P_1Q_1}$.

CASO IV: Los puntos están a lados distintos de la recta l.



Sean M y N, respectivamente, los puntos de l tales que son los puntos medios de los segmentos $\overline{QQ_1}$ y $\overline{PP_1}$, respectivamente. Además,

(1) Note que:

- $\overline{MN} \cong \overline{MN}$
- $\overline{NP} \cong \overline{NP_1}$ porque N es el punto medio de $\overline{PP_1}$.
- $\angle MNP \cong \angle MNP_1$ por ser rectos.

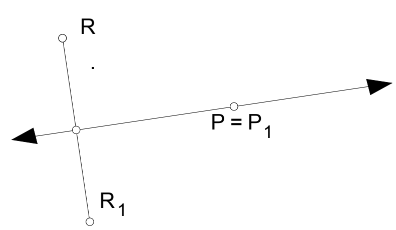
Entonces $\Delta PMN \cong \Delta P_1MN$ por el postulado L.A.L. Por lo tanto $\overline{MP} \cong \overline{MP_1}$.

(2) Como $\angle QMN \cong \angle Q_1MN$ y $\angle NMP \cong \angle NMP_1$ entonces $\angle Q_1MP_1 \cong \angle QMP$.

(3) $\overline{MQ} \cong \overline{MQ_1}$ porque M es el punto medio de $\overline{QQ_1}$.

De (1), (2) y (3) se tiene, por el teorema L.L.L., que $\Delta PMQ \cong \Delta P_1MQ_1$ y por lo tanto $\overline{PQ} \cong \overline{P_1Q_1}$.

Teorema 2: El conjunto de los puntos invariantes por una simetría axial es el eje de simetría.



Demostración:

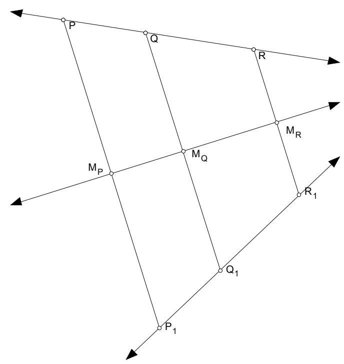
Este teorema es consecuencia inmediata de la definición de simetría axial:

Si P es un punto que pertenece al eje de simetría entonces es igual a su imagen, es decir, es un punto invariante.

Si P no es un punto que pertenece al eje de simetría, entonces su imagen es un punto P_1 tal que el eje de simetría es la mediatriz del segmento $\overline{PP_1}$, por lo tanto $P \neq P_1$ y entonces P no es un punto invariante respecto a esta simetría.

Los siguientes teoremas no se demostrarán. Se incluyen porque son necesarios para el trabajo que se realizará en el taller.

Teorema 3: Una simetría respecto a una recta preserva colinealidad y la relación "estar entre". Es decir, si P, Q y R son puntos colineales y sus imágenes por la simetría respecto a la recta l son P_1, Q_1 y R_1, respectivamente, entonces P_1, Q_1 y R_1 también son colineales. Además, si $P-Q-R$ entonces $P_1-Q_1-R_1$.



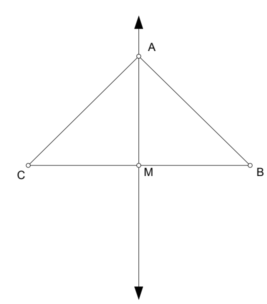
Teorema 4: Si P y Q son puntos tales que sus imágenes por la simetría respecto a la recta l son P_1 y Q_1 respectivamente, entonces, bajo esta simetría: la imagen de $\overleftrightarrow{PQ}$ es $\overleftrightarrow{P_1Q_1}$, la imagen de $\overrightarrow{PQ}$ es $\overrightarrow{P_1Q_1}$ y la imagen de $\overline{PQ}$ es $\overline{P_1Q_1}$.

Teorema 5: Bajo una simetría respecto a una recta l, la imagen de un triángulo es un triángulo congruente a él.

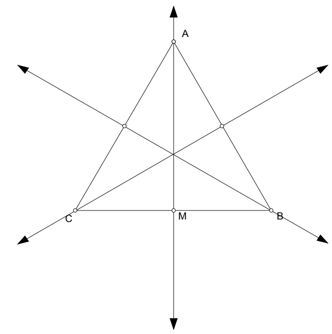
Teorema 6: Una simetría respecto a una recta preserva medida de ángulos. Es decir, si P_1, Q_1 y R_1 son, respectivamente, las imágenes de los puntos P, Q y R por la simetría respecto a la recta l, entonces $\angle PQR \cong \angle P_1Q_1R_1$.

II. Ejes de simetría en triángulos isósceles

Teorema 7: Si en el triángulo ΔABC, $AB = AC$ entonces la mediatriz del lado $\overline{BC}$ es un eje de simetría del triángulo.

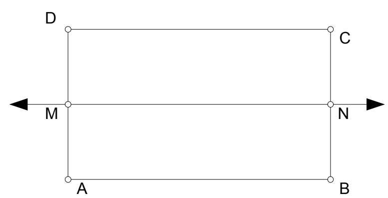


Corolario: Si ΔABC es equilátero entonces la mediatriz de cada uno de sus lados es un eje de simetría del triángulo.

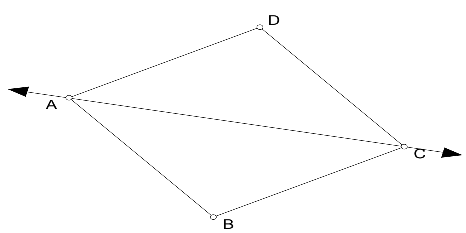


III. Ejes de simetría en paralelogramos

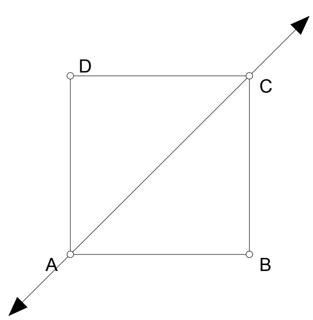
Teorema 8: La recta que contiene a los puntos medios de dos lados opuestos de un rectángulo es un eje de simetría del paralelogramo.

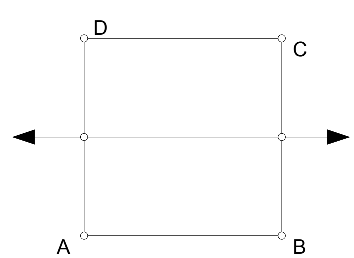


Teorema 9: La recta que contienen dos vértices opuestos de un rombo es un eje de simetría del paralelogramo.



Corolario: La recta que contiene dos vértices opuestos o los puntos medios de dos lados opuestos de un cuadrado es un eje de simetría del paralelogramo.





Marco metodológico: procedimiento para el taller

El taller contará de cuatro partes:

1. Una pequeña presentación y la explicación del trabajo a realizar

Se trabajará con una presentación de los enfoques de estudio de la Geometría euclidiana y de la propuesta particular que se presenta para trabajar las simetrías axiales en octavo año. Tiempo aproximado para esta fase: 15 minutos.

2. Trabajo en grupos

Se trabajará en cinco grupos. A cada uno se le asignará una hoja de trabajo; éstas cuentan con dos ejercicios diferentes, ya sea para resolverlo utilizando los conceptos de simetría axial o para comparar la forma de resolver un problema con simetría axial y sin ella.

Los ejercicios que se utilizarán son los siguientes:

1. Demuestre el siguiente teorema: La recta que contienen dos vértices opuestos de un rombo es un eje de simetría del paralelogramo.
2. El cuadrilátero $\lozenge ABCD$ es un rombo.
   a. Cite todos los ejes de simetría de este rombo.
   b. Trace la circunferencia de centro D y radio 2 cm. ¿Tiene la nueva figura ejes de simetría? Si existen, cítelos todos.
   c. Trace la circunferencia de centro B y radio 2 cm. ¿Tiene la nueva figura ejes de simetría? Si existen, cítelos todos.

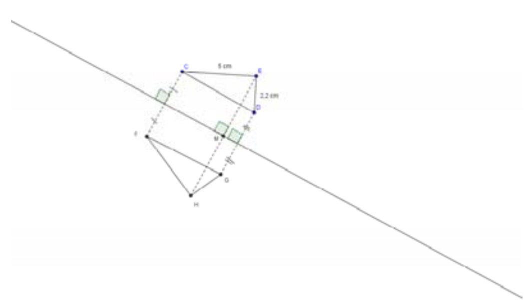
1. Demuestre el siguiente teorema: La recta que contiene a los puntos medios de dos lados opuestos de un rectángulo es un eje de simetría del paralelogramo.
2. Dos pueblos A y B se localizan del mismo lado de un río sobre el cual se va a construir un puente. Determine cuál debe ser la posición del puente de modo tal que la carretera que irá de un pueblo a otro, pasando por él, sea lo más corta posible. Justifique.

1. Demuestre el siguiente teorema: Una simetría respecto a una recta preserva medida de ángulos. Es decir, si P_1, Q_1 y R_1 son, respectivamente, las imágenes de los puntos P, Q y R por la simetría respecto a la recta l, entonces $\angle PQR \cong \angle P_1Q_1R_1$.

2. En la figura M es el punto medio de $\overline{EH}$ y $\overline{HG} \perp \overline{FH}$. Sin utilizar instrumentos de la medida del $\angle DEC$ y el área del ΔFGH.

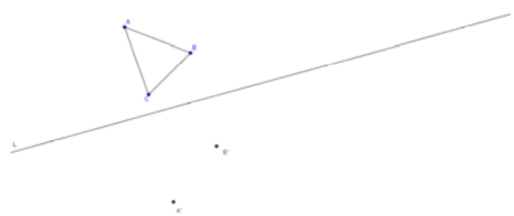
a. Utilizando el concepto de simetría axial.

b. Sin utilizar conceptos de la geometría de las transformaciones.

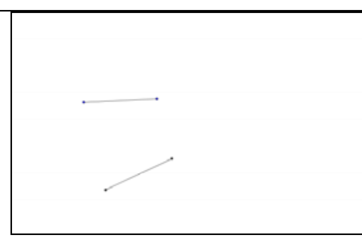


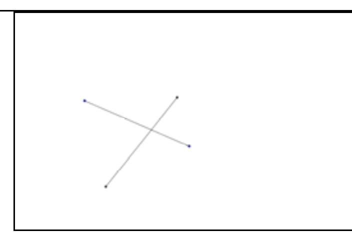
1. Demuestre el siguiente teorema: Si en el triángulo ΔABC se cumple que $AB = AC$, entonces la mediatriz del lado $\overline{BC}$ es un eje de simetría del triángulo.

2. En la figura A' y B' son los simétricos de los puntos *A* y *B* con respecto a la recta *L*. Usando únicamente una regla graduada, construya el simétrico del ΔABC. Indique cada uno de los pasos que se deben realizar. ¿Y si la regla no está graduada?



1. En cada una de las siguientes figuras, los segmentos son simétricos con respecto a una recta L. Explique cómo se puede encontrar L en cada uno de estos casos, al menos de dos formas distintas. Justifique.

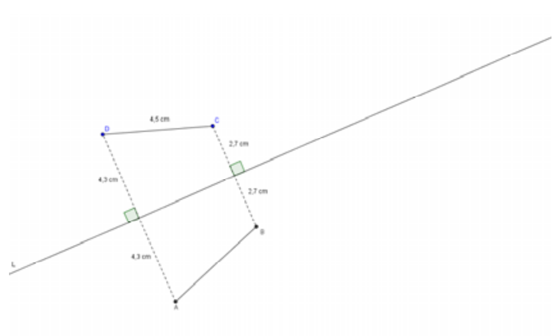




2. Sin utilizar ningún instrumento, de la medida del segmento $\overline{AB}$. Justifique detalladamente.

a. Utilizando el concepto de simetría axial.

b. Sin utilizar conceptos de la geometría de las transformaciones.



Tiempo aproximado para esta fase: 30 minutos.

3. Exposición de los resultados obtenidos

A cada grupo, se le solicitará que muestre a los demás el trabajo realizado y cómo le llevaron a cabo.

Tiempo aproximado para esta fase: 30 minutos.

4. Comentarios finales y entrega de resumen.

El resumen que se entregará a los participantes incluye las definiciones de los enfoques y todos los problemas y ejercicios propuestos para el trabajo en grupos.

Tiempo aproximado para esta fase: 15 minutos.

Referencias bibliográficas

[1] Alsina, Claudi; Pérez, Rafael y Ruiz, Ceferino (1989). **Simetría dinámica**. Madrid: Editorial Síntesis.

[2] Coblentz, Dwight *et al*. (1989). **Geometría**. Illinois: Scott Foresman and Company.

[3] Kline, Morris (1992). **Matemáticas para los estudiantes de humanidades**. México D. F.: Mathematics Addisson Wesley Publishing.

[4] Kline, Morris (1992). **El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días, III**. Madrid: Alianza Editorial.

[5] Montero, Bernardo (2005, mayo). **Cómo se concibe el concepto de Geometría De Klein (Programa de Erlangen – 1872)**. Proyecto MATEM, ciclo de charlas a profesores.

[6] UNESCO (1983). **Nuevas tendencias en la enseñanza de la Matemática**. En: <u>La enseñanza de las Matemáticas modernas</u>. Compilado por: Jesús Hernández. Madrid: Alianza Universidad.

[7] Tuller, Annita (1967). *A* ***Modern Introduction of Geometries***. New Jersey: D. Van Nostrand Company, Inc.